Un début de progression possible pour l'étude de la règle de trois[1]

Les programmes du GRIP évoquent deux fois la règle de trois[2]
- pour le CE :

> ***Usage et pratique des quatre opérations dans des problèmes simples*** nécessitant au maximum deux étapes de raisonnement. Utilisation de la règle de trois rédigée, en liaison avec les propriétés de la multiplication et de la division.

- pour le CM :

> Règle de trois simple directe et inverse en liaison avec le calcul d'une fraction d'une grandeur.

Ces programmes présentent une différence avec les programmes des années 1923 à 1970 qui n'introduisaient la règle de trois qu'en Cours moyen. Le but de ce texte est de présenter une progression portant sur le CP et le CE qui permette d'enseigner pour la fin de CE, quasiment sans alourdissement du programme, une version simplifiée mais solide de la règle de trois simple directe, ceci permettant d'aborder plus facilement un enseignement plus complet de cette règle de trois en CM.

Isabelle Voltaire, dans son texte « Règle de trois et tableaux de proportionnalité »[3] montre comment la règle de trois était enseignée en CM. Reprenons l'exemple, choisi dans le manuel de CM de Croisille[4], exemple qui expose globalement la même démarche que celle des autres manuels de l'époque. La définition des grandeurs directement proportionnelles et de la règle de trois simple directe se présente ainsi sur la même page[5] :

LES GRANDEURS DIRECTEMENT PROPORTIONNELLES

> 1 paumelle coûte 1,50 f, 2 paumelles coûtent 2 fois 1,50 f, etc..
> Que coûtent : 1 paumelle ? les 2 paumelles du petit buffet ? les 3 paumelles de la porte ? Les 8 paumelles du grand buffet ?
> Le nombre et le prix des paumelles sont donc deux grandeurs telles que si l'une varie, l'autre varie dans le même sens et dans la même proportion. On dit que **ces deux grandeurs sont directement proportionnelles.**
>
> 404. **Deux grandeurs sont directement proportionnelles lorsque l'une devenant 2, 3, 4... fois plus grande ou plus petite, l'autre devient aussi 2, 3, 4... fois plus grande ou plus petite.**

LA RÈGLE DE TROIS SIMPLE ET DIRECTE

> 405. Problème. - Sur un champ de 12 ares, planté d'asperges, un cultivateur emploie 15 kg de nitrate de soude. Quel poids de nitrate emploiera-t-il sur un autre champ de 38 ares ?
> Sur 12 ares le cultivateur épand 15 kg de nitrate,
> Sur 1 are il en épand 12 fois moins, soit : 15kg : 12 ou 15 kg/12
> Sur 38 ares il en épand 38 fois plus que sur 1 are,
> soit (15 kg/12) × 38 = (15 kg × 38)/12 = **47,500 kg.**
> Nous avons effectué d'abord la multiplication, puis la division.

---

1 Voir la page http://www.slecc.fr/regle_3.htm

2 Il existe un certain flou au sujet de l'emploi de l'expression « règle de trois » : ici elle désigne le type de raisonnement basé sur la réduction à l'unité, raisonnement écrit dans la langue maternelle avec le minimum de formalisme mathématique (pas de flèches …), sans tableaux de proportionnalité ni utilisation des propriétés des proportions (dont les fameux « produits en croix »).

3 http://www.slecc.fr/sources-slecc/documents/reflexion/maths/regle-3/RegleDeTrois-IVoltaire.pdf

4 G. Croisille, *Nouveau cours d'arithmétique, système métrique et géométrie*, Cours moyen et préparation au CEP, 1924 . Sur la page http://www.r-lecole.freesurf.fr/l-anc/anc.html

5 Page 21 du fichier .pdf http://re2.freesurf.fr/l-anc/Acm21-24.pdf

406. Ce problème, qui s'applique à des grandeurs proportionnelles et qui consiste, trois nombres étant donnés, à en chercher un quatrième, est une **règle de trois**.
407. Cette règle de trois est dite simple parce qu'elle ne contient que deux espèces de grandeurs ; on la dit aussi directe parce que ces grandeurs sont directement proportionnelles.
408. Remarque. - On n'effectue les opérations qu'après avoir simplifié les expressions.

Comme dans tous les manuels de l'époque, la leçon sur la règle de trois suit celle sur la définition des grandeurs proportionnelles et la règle de trois est explicitement définie comme méthode de résolution de problèmes portant sur des grandeurs proportionnelles [*406. Ce problème, qui s'applique à des grandeurs proportionnelles et qui consiste, trois nombres étant donnés, à en chercher un quatrième, est une **règle de trois**.*]. Autrement dit, l'utilisation de la règle de trois présuppose la connaissance de ce que sont des grandeurs proportionnelles et la règle de trois ne doit être utilisée que lorsque l'on a vérifié que les grandeurs en question sont effectivement proportionnelles[6].

De plus, le raisonnement , c'est-à-dire

Sur 12 ares le cultivateur épand 15 kg de nitrate,
Sur 1 are il en épand 12 fois moins, soit : 15kg : 12 ou 15 kg/12
Sur 38 ares il en épand 38 fois plus que sur 1 are, soit (15 kg/12) × 38 = (15 kg × 38)/12 = **47,500 kg.**

a deux caractéristiques
- il inclut la réduction à l'unité
- comparativement aux autres méthodes de résolution, dont les tableaux de proportionnalité, il est au maximum écrit dans la langue maternelle, ce qui oblige l'élève à préciser son raisonnement et lui permet donc d'en vérifier plus aisément la validité. Il est beaucoup plus aisé de comprendre que l'on a fait une erreur lorsque l'on écrit explicitement « *Sur 1 are il en épand 12 fois plus, soit : 15kg × 12* » que si l'on a simplement écrit l'opérateur 12/38 au lieu de 38/12.[7]

Remarquons toutefois que l'exemple traité suppose une connaissance des nombres décimaux, des fractions et des opérations sur celles-ci de niveau CM.

*
* *

On peut résumer notre objectif de fin de CE2 sous la forme suivante : savoir traiter par la règle de trois avec réduction à l'unité des problèmes ayant toutes les caractéristiques du problème présenté plus haut, c'est-à-dire notamment méthode de réduction à l'unité et rédaction en français mais avec les limitations suivantes :

i) l'élève n'a pas à savoir ce que sont des grandeurs proportionnelles (ici, l'étude de la règle de trois sert d'introduction à une future étude des grandeurs proportionnelles)

ii) l'élève n'a besoin d'aucune connaissance ni sur les fractions ni sur les nombres décimaux, autrement dit les données sont des nombres entiers et le quotient exact de la division nécessaire est entier.

De plus la progression qui permet cet objectif est compatible avec la progression générale du CE : par exemple, elle respecte le fait que, en CE1, les divisions sont au maximum des divisions de nombres inférieurs à 100 par un nombre à un chiffre.

Mais pour préciser ce qui nous semble central, prenons un exemple qui, selon cette progression, devrait être traitable en fin de CE2 :

17 clés USB coûtent 221 €. Quel est le prix de 19 clés du même type ?

---

6 En fait sur des cas simples que l'on rencontre au début de l'apprentissage de la règle de trois du type *Si trois baguettes coûtent 12 €, quel est le prix de 7 baguettes ?*, la vérification du fait que le prix des baguettes est proportionnel au nombre de baguettes en utilisant la règle du paragraphe 404 ci-dessus est beaucoup plus longue que la résolution du problème posé. Dans les faits, on ne vérifiait pas que les grandeurs étaient proportionnelles, mais cet exercice était cependant formateur car, comme nous le verrons, il repose simplement sur des propriétés basiques de la multiplication et de la division.

7 C'est une des raisons qui font que lorsque l'on fait une erreur en ayant utilisé une méthode basée sur les tableaux de proportionnalité, il est souvent utile, pour la repérer, de repasser à la forme explicite du raisonnement de la règle de trois.

Le raisonnement est le suivant, raisonnement qui comporte, outre la synthèse/reprise de ce qui est dit dans l'énoncé [ici simple reprise de *17 clés USB coûtent 221 €*], les parties [1] et [2]

> *Si 17 clés USB coûtent 221 €, 1 clé coûte 17 fois moins, c'est-à-dire 221 € : 17 = 13 € [1]*
> *19 clés coûteront 19 fois plus qu'une clé, c'est-à-dire 13 € × 19 = 247 €. [2]*

Commençons par la partie [2], « partie multiplicative » du raisonnement : connaissant le prix – 13 € - d'une clé, on calcule le prix de 19 clés , 13 € × 19 = 247 €, c'est-à-dire que l'on utilise strictement la définition même de la multiplication comme addition répétée. Il s'agit donc de la résolution d'un problème de base qui apparaît dès que l'on aborde la multiplication.

Prenons maintenant la partie [1] du raisonnement – « réduction à l'unité » : « Si 17 clés USB coûtent 221 €, 1 clé coûte 17 fois moins, c'est-à-dire 221 € : 17 = 13 € »

C'est en fait la connaissance inverse de la précédente, c'est-à-dire la définition précise de la division dans le cas de la recherche de la valeur d'une part.

On peut donc dire que le type de problème « de règle de trois » que nous souhaitons voir traité en fin de CE ne suppose comme connaissance que les propriétés basiques de la multiplication et de la division sur les entiers. Il nécessite cependant une bonne maîtrise des tables de multiplication et la connaissance du système métrique.

*
* *

Proposition de progression

Il s'agit d'une proposition de progression non encore testée en CE mais visant ce niveau. D'un autre côté, comme cette progression porte sur les débuts de l'enseignement de la règle de trois, elle peut servir pour introduire la règle de trois dans un CM1/CM2 suivant, par exemple, les programmes de 2002, ce que ne permettent pas les progressions que l'on trouve dans les manuels des années 1880 à 1960.

* Cours préparatoire *

Traitement attentif des multiplications et divisions par 2 et 5.
En fait la préparation à l'enseignement de la règle de trois n'implique rien de particulier en ce qui concerne les programmes de CP ; elle consiste essentiellement à traiter – dans des problèmes séparés réduits à une question – des problèmes élémentaires de deux types

a) *Une baguette coûte 2 € . Quel est le prix de 5 baguettes ?*
b) *Cinq baguettes coûtent 10 €. Quel est le prix d'une baguette ?*

* Cours élémentaire *

Le principe général de la progression est le suivant : comme ce que nous visons pour la fin du CE se réduit aux deux étapes de raisonnement de la règle de trois, l'une, la réduction à l'unité liée à la division (« fois moins ») [Etape I] et l'autre liée à la multiplication (« fois plus ») [Etape II],

- on commencera par traiter ces deux étapes dans des problèmes séparés (CE1)
- on continuera en les présentant comme questions successives explicites d'un même problème (fin CE1 ou début CE2)
- on finira (fin CE2) en ne posant que la deuxième question, l'élève étant censé reconstituer par lui-même la première étape (passage à l'unité)

Cette progression respecte bien le fait que le CE est le cours où l'on passe des problèmes « à une étape » aux problèmes « à deux étapes ».
D'autre part, il importe que le plus tôt possible - et c'est quelque fois possible en CP pour 2 et 5 - , de bien faire, d'abord sous forme orale et ensuite sous forme écrite, la différence entre « *n fois plus de pommes*» et « *n pommes de plus* ». Même chose pour « *n fois moins de pommes* » et « *n pommes de moins* ».

* Classe de CE1 *

Au CE1 les problèmes « en une étape » dominent encore même s'il doit être possible de poser des problèmes en deux étapes en fin d'année. Il faut aussi compter avec le fait que l'on dispose, au mieux, que de la multiplication et la division par un nombre à un chiffre.
Bien respecter la progression du point de vue numérique : les exemples, surtout les premiers, doivent porter à chaque fois sur des problèmes où l'élève « voit les nombres » : le mieux est donc de s'appuyer y compris sur les exemples écrits - c'est évident pour l'oral - sur des multiples de 10, 5, 2 et 4.

Problèmes écrits et oraux portant séparément

I) Sur l' [Etape I] , c'est-à-dire en liaison avec la division

8 gâteaux coûtent 24 €. Quel est le prix d'un gâteau ?

II) Sur l' [Etape II] , c'est-à-dire en liaison avec la multiplication
a)*Un gâteau coûte 3 € . Quel est le prix de 8 gâteaux ?*
b)*Un camion peut transporter 4 t de sable en un trajet . Quel poids de sable peut être transporté en 7 trajets ?*

Pour tous ces problèmes de CE1,
- l'explication orale utilise le vocabulaire qui servira ensuite pour le raisonnement de la règle de trois, c'est-à-dire qu'il est du type : *En 7 trajets, le camion transportera 7 fois plus qu'en un trajet*
- mais la rédaction écrite se limite à :
Poids transporté en 7 trajets
4 t × 7 = 28 t

Note : Afin d'éviter un recours systématique au passage par la valeur de l'unité, y compris lorsque ce n'est pas utile, il faut poser régulièrement dès le CE1 et au CE2, c'est-à-dire avant la mise en place du raisonnement complet sur la règle de trois, des problèmes du type suivant :

a) *7 grosses oranges pèsent 4 kg. Quel est le poids de 28 oranges ?*
b) *12 baguettes coûtent 24 €. Quel est le prix de 3 baguettes ?*

Le palier est difficile à franchir, ces problèmes qui s'apparentent à un changement d'unité (comme tout problème de multiplication et de division) peuvent être introduits par des problèmes de conversion :

a) *3 m de câble électrique pèsent 2 kg. Combien pèsent 3 dam de câble?*
b) *Deux kilogrammes de cerises coûte 20 €. Combien coûtent deux hectogrammes ?*

* Classe de CE 2 * .

- Les étapes I et II sont regroupées à l'intérieur d'une même problème ; dans une première phase, les deux questions sont posées explicitement, puis seulement la deuxième question.
- On introduira progressivement de « grands nombres » , c'est-à-dire de ceux pour lesquels on ne peut pas trouver le résultat de tête et où il faut faire confiance au caractère « abstrait » de l'opération (cf. l'exemple des clés USB donné plus haut)
- Même si l'explicitation orale de la solution se fait autant que possible en utilisant le raisonnement classique de la règle de trois, on passera progressivement de la rédaction écrite du problème qui n'indique que la nature des quantités recherchées dans chaque étape (exemple *infra* de la phase I) à la rédaction « classique » de la règle de trois.

<u>Phase I</u> : à tester si possible en fin de CE1 mais plus sûrement en première partie de CE2 (on garde de toute façon des « petits nombres », le choix numérique des données dépendant de la progression sur l'acquisition des opérations)

Problème :

7 L de vin coûtent 28 euros. Quel est le prix d'un litre de vin ? Quel est le prix de 15 litres de vin ?

- Explication orale utilisant le raisonnement de la règle de trois mais on ne cherche pas à l'utiliser dans la rédaction écrite
- Rédaction

Prix d'un litre de vin
28€ : 4 = 7 €
Prix de 15 litres de vin :
7€ × 15 = 105 €

<u>Phase II</u>, obligatoirement en CE2 : on supprime la question intermédiaire et c'est l'élève qui doit retrouver par lui-même la nécessité du passage à l'unité :

Problème (exemple portant sur des « petits nombres ») :

7 l de vin coûtent 28 euros.
Quel est le prix de 15 litres de vin ?

Dans une première étape, même rédaction que dans la phase I. Puis – ou simultanément ? - on introduit la rédaction[8] du raisonnement de la règle de trois, c'est-à-dire

Si 7 l de vin coûtent 28 euros
1 l coûte 7 fois moins, c'est-à-dire 28€ :7= 4 €
15 l coûtent 15 fois plus qu'un litre, c'est-à-dire 4€ ×15 =60 €.

Et, en fin d'année de CE2, on doit finalement obtenir la possible résolution du problème des clés USB présenté précédemment, c'est-à-dire

- avec rédaction écrite du raisonnement de la règle de trois,
- les données étant, comme dans ce problème, des nombres entiers mais dont la taille fait que le problème ne peut être résolu sans poser les opérations.

26/04/2008

Michel Delord

[8] Il faut également une progressivité dans la difficulté de rédaction du problème, cette difficulté dépendant notamment de la forme de rédaction de l'énoncé. Par exemple, notamment au début de l'enseignement de la règle de trois, un élève a plus de difficultés pour écrire le raisonnement complet de la règle de trois si le problème est posé sous la forme I « *Avec 24 euros, on peut acheter 12 baguettes. Quel est le prix de 7 baguettes ? »* que s'il est posé sous la forme II « *12 baguettes coûtent 24 €. Quel est le prix de 7 baguettes ? ».*